

| Cognome | Nome | Matricola | Posizione | Voto |
|---------|------|-----------|-----------|------|
|         |      |           |           |      |

**Modalità d'esame:**

- La durata della prova è di 90 minuti. La prova viene considerata sufficiente con una valutazione maggiore o uguale a 18/30;
- E' possibile utilizzare una calcolatrice non programmabile ed un formulario di una sola pagina scritta di proprio pugno dallo studente. Qualunque altro tipo di supporto (appunti, quaderni, libri, tablet, cellulari, ...) e di smartwatch non è consentito;
- Nella risoluzione degli esercizi è necessario riportare la grandezza che si vuole calcolare, la formula utilizzata ed il risultato numerico con unità di misura. L'assenza di uno di questi elementi viene considerata come errore. I risultati numerici devono essere riportati negli appositi spazi;
- La prova va svolta a penna di colore diverso dal rosso in maniera ordinata e con grafia leggibile, pena l'invalidazione della stessa. Deve essere svolta sui fogli consegnati dal docente, eventuali fogli aggiuntivi o di brutta non verranno corretti.

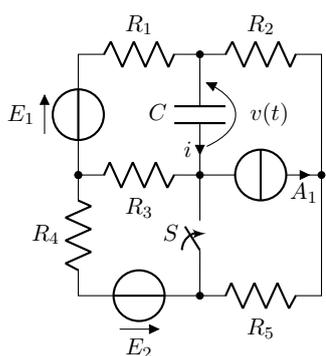
**Esercizio 1**

**8 punti** - Dato il circuito in figura, sapendo che l'interruttore  $S$  si chiude all'istante  $t_0 = 0s$ , determinare l'espressione analitica e rappresentare l'andamento nel tempo della tensione  $v(t)$  per  $-\infty < t < +\infty$  con il verso indicato in figura. Calcolare, inoltre, la potenza generata da  $A_1$  all'istante di tempo  $t_0^-$ , l'energia accumulata nel condensatore al tempo  $t_1 = 2\tau$  ed la corrente circolante nel condensatore al tempo  $t_1$  ( $i(t_1)$ ), presa con il verso indicato in figura. Riportare in maniera esplicita il valore delle condizioni iniziali ( $v(t_0^-)$ ), il valore delle condizioni finali ( $v(\infty)$ ) e la costante di tempo ( $\tau$ ).

**Attenzione**, il valore di  $A_1$  va determinato in funzione del codice persona come segue ( $A_1 = h/2 + 1$ ):

inserire il proprio **Codice Persona** (8 cifre):

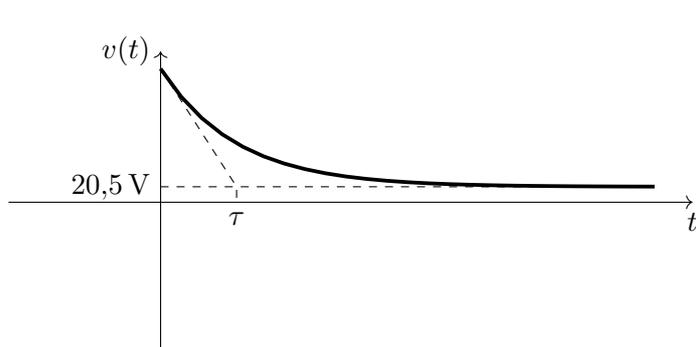
|   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |         |                 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---------|-----------------|
|   |   |   |   |   |   |   |   |  |  | $A_1 =$ |                 |
| a | b | c | d | e | f | g | h |  |  |         | $\frac{h}{2+1}$ |



$$\begin{aligned}
 E_1 &= 40 \text{ V} \\
 E_2 &= 60 \text{ V} \\
 A_1 &= h/2 + 1 \\
 R_1 &= 16 \ \Omega \\
 R_2 &= 24 \ \Omega \\
 R_3 &= 30 \ \Omega \\
 R_4 &= 20 \ \Omega \\
 R_5 &= 20 \ \Omega \\
 C &= 585 \ \mu\text{F}
 \end{aligned}$$

**Risultati:**

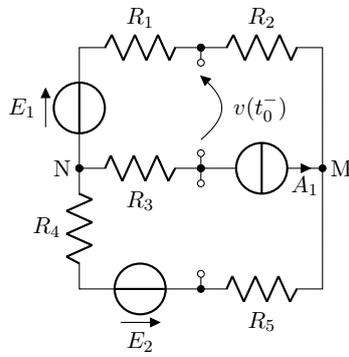
$$\begin{aligned}
 v(t_0^-) &= 177 \text{ V} \\
 P_{A_1}(t_0^-) &= 787,50 \text{ W} \\
 v(\infty) &= 29,67 \text{ V} \\
 \tau &= 10 \text{ ms} \\
 W_E(t_1) &= 719,77 \text{ mJ} \\
 i(t_1) &= -1,17 \text{ A}
 \end{aligned}$$



$$v(t) = \begin{cases} 177 \text{ V} & t < t_0 \\ 20,5 + 156,5e^{-t/\tau} & t > t_0 \end{cases}$$

**Soluzione:**

**Rete per  $t < 0s$**



La rete è binodale:

$$V_{MN} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_2} + A_1 + \frac{E_2}{R_4 + R_5}}{\frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_1 + R_2}} = 120 \text{ V} \quad (1)$$

Quindi, la corrente che scorre nel ramo in alto vale:

$$I_1 = \frac{V_{MN} - E_1}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A} \quad (2)$$

Infine:

$$v(t_0^-) = E_1 + I_1 R_1 + A_1 R_3 = 177 \text{ V} \quad (3)$$

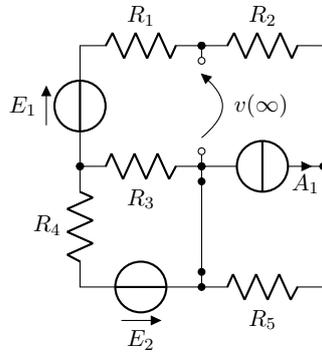
La tensione ai capi del generatore  $A_1$  in queste condizioni è:

$$V_A = V_{MN} + R_3 A_1 = 225 \text{ V} \quad (4)$$

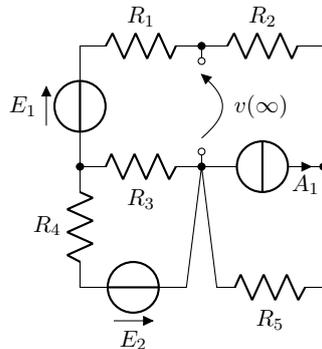
Quindi:

$$P_{A_1} = V_A A_1 = 787,50 \text{ W} \quad (5)$$

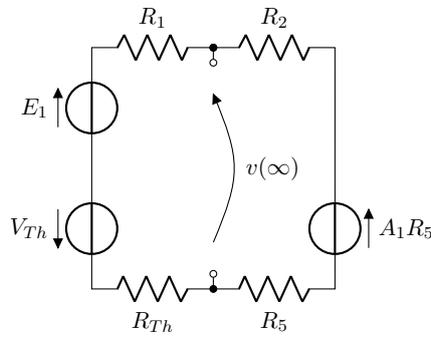
### Condizioni finali



Ridisegnando il corto circuito centrale:



Calcolando due Thevenin delle parti sotto:



$$V_{Th} = E_2 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 36 \text{ V} \quad (6)$$

$$R_{Th} = R_3 // R_4 = 12 \text{ } \Omega \quad (7)$$

A questo punto la rete è a singolo anello:

$$I = \frac{A_1 R_5 + V_{Th} - E_1}{R_1 + R_2 + R_5 + R_{Th}} = 0,92 \text{ A} \quad (8)$$

$$v(\infty) = A_1 R_5 - R_2 I - R_5 I = 29,67 \text{ V} \quad (9)$$

La resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = (R_1 + R_4 // R_3) // (R_2 + R_5) = 17,11 \text{ } \Omega \quad (10)$$

Quindi:

$$\tau = R_{eq} C = 10,01 \text{ ms} \quad (11)$$

**Tempo**  $t_1 = 2\tau$ :

$$v(t_1) = v(\infty) - [v(t_0^-) - v(\infty)] e^{-t_1/\tau} = 49,61 \text{ V} \quad (12)$$

$$W_E(t_1) = \frac{1}{2} C v(t_1)^2 = 719,77 \text{ mJ} \quad (13)$$

L'andamento nel tempo della corrente è:

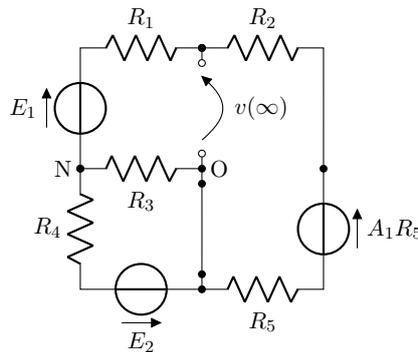
$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = -\frac{C}{\tau} [v(t_0^-) - v(\infty)] e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Quindi:

$$i(t_1) = -1,17 \text{ A} \quad (15)$$

**Soluzione Alternativa condizioni finali:**

Per risolvere questa rete è necessario trasformare il parallelo fra il generatore di corrente ed il resistore  $R_5$  in Thevenin:



La rete è ancora binodale:

$$V_{NO} = \frac{\frac{A_1 R_5 - E_1}{R_1 + R_2 + R_5} - \frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = -25 \text{ V} \quad (16)$$

Analogamente a prima, si calcola la corrente nel ramo in alto:

$$I_1 = \frac{A_1 R_5 - E_1 - V_{NO}}{R_1 + R_2 + R_5} = 0,92 \text{ A} \quad (17)$$

$$v(\infty) = E_1 + I_1 R_1 + V_{NO} = 29,67 \text{ V} \quad (18)$$

## Esercizio 2

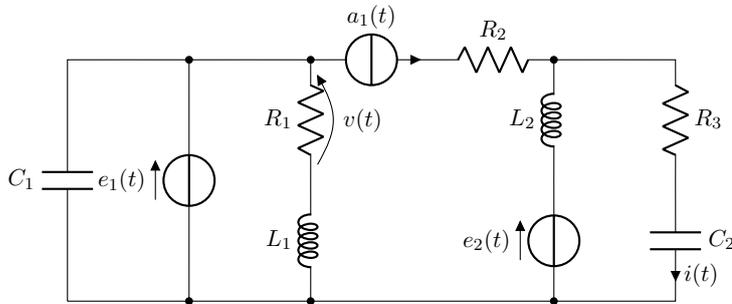
**8 punti** - Dato il circuito in figura, funzionante in regime sinusoidale con pulsazione 100 rad/s, calcolare nel dominio del tempo l'andamento della tensione  $v(t)$  ai capi del resistore  $R_1$  e della corrente  $i(t)$  circolante nel condensatore  $C_2$ . Calcolare, poi, la potenza reattiva dissipata da  $C_1$ , la potenza complessa erogata da  $e_1(t)$ , la potenza apparente erogata da  $a_1(t)$ , la potenza attiva dissipata da  $R_3$  e la potenza reattiva erogata da  $e_2(t)$ . Calcolare, infine, l'energia accumulata nell'induttore ( $W_H$ ) al tempo  $t = T$ , dove  $T$  è il periodo delle sinusoidi.

**Attenzione**, il valore di  $A_M$  va determinato in funzione del codice persona come segue ( $A_M = g + 1$ ):

inserire il proprio **Codice Persona** (8 cifre):

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |   |   |   |
| a | b | c | d | e | f | g | h |

$A_M = \frac{\quad}{g+1}$



$$\begin{aligned} C_1 &= 4 \text{ mF} \\ R_1 &= 5 \text{ } \Omega \\ L_1 &= 50 \text{ mH} \\ R_2 &= 25 \text{ } \Omega \\ L_2 &= 100 \text{ mH} \\ C_2 &= 1 \text{ mF} \\ R_3 &= 10 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

### Risultati:

$$\begin{aligned} v(t) &= 7,07 \cos(\omega t - 3\pi/4) \\ i(t) &= 3,16 \cos(\omega t + 2,03) \\ Q_{C_1} &= -20 \text{ var} \\ \mathbf{S}_{E_1} &= (-9,14 - j29,14) \text{ VA} \\ A_{A_1} &= 299,08 \text{ VA} \\ P_{R_3} &= 50 \text{ W} \\ Q_{E_2} &= 0 \text{ var} \\ W_H &= 900 \text{ mJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 10 \sin(\omega t) \\ e_2(t) &= 10\sqrt{2} \cos(\omega t) \\ a_1(t) &= A_M \cos(\omega t + \pi/4) \end{aligned}$$

### Soluzione:

Per prima cosa si effettui la trasformata fasoriale:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2} \text{ V} \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_2 = 10 \text{ V} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} \text{ A} \quad (21)$$

$$\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = +j5 \text{ } \Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{Z}_{L_2} = j\omega L_2 = +j10 \text{ } \Omega \quad (23)$$

$$\mathbf{Z}_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} = -j2,50 \text{ } \Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{Z}_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2} = -j10 \text{ } \Omega \quad (25)$$

Dato che la tensione ai capi di  $C_1$  è imposta, la potenza reattiva si calcola facilmente:

$$Q_{C_1} = \frac{|\mathbf{E}_1|^2}{X_{C_1}} = -20 \text{ var} \quad (26)$$

La tensione ai capi di  $R_1$  si calcola con un partitore:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + \mathbf{Z}_{L_1}} = (-3,54 - j3,54) \text{ V} \quad (27)$$

Quindi:

$$v(t) = 7,07 \cos(\omega t - 3\pi/4) \quad (28)$$

La corrente in  $\mathbf{E}_1$  si calcola con una KCL:

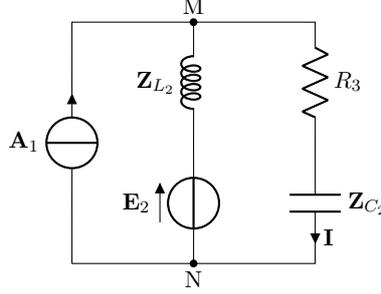
$$\mathbf{I}_{E_1} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_{C_1}} + \frac{\mathbf{E}_1}{R_1 + \mathbf{Z}_{L_1}} - \mathbf{A}_1 = (0,12 - j2,71) \text{ A} \quad (29)$$

$$\mathbf{S}_{E_1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I}_{E_1}^* = (19,14 - j0,86) \text{ VA} \quad (30)$$

La tensione ai capi del generatore  $\mathbf{A}_1$  si calcola con una KVL:

$$\mathbf{V}_A = -\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}_{MN} + R_2 \mathbf{A}_1 \quad (31)$$

La tensione  $\mathbf{V}_{MN}$  si calcola sdoppiando il generatore  $\mathbf{A}_1$ :



$$\mathbf{V}_{MN} = \frac{\mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_{L_2}}}{\frac{1}{\mathbf{Z}_{L_2}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{C_2} + R_3}} = (10 + j30) \text{ V} \quad (32)$$

Di conseguenza si può calcolare la tensione ai capi del generatore di corrente:

$$\mathbf{V}_A = -\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}_{MN} + R_2 \mathbf{A}_1 = (60 + j87,07) \text{ V} \quad (33)$$

Da cui:

$$A_{A_1} = |\mathbf{V}_A| |\mathbf{A}_1| = 299,08 \text{ VA} \quad (34)$$

La corrente  $\mathbf{I}$  vale:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{MN}}{\mathbf{Z}_{C_2} + R_3} = (-1 + j2) \text{ A} \quad (35)$$

Quindi:

$$i(t) = 3,16 \cos(\omega t + 2,03) \quad (36)$$

La potenza attiva elaborata da  $R_3$  è:

$$P_{R_3} = R_3 |\mathbf{I}|^2 = 50 \text{ W} \quad (37)$$

La corrente che circola in  $\mathbf{E}_2$  vale:

$$\mathbf{I}_{E_2} = \frac{\mathbf{E}_2 - \mathbf{V}_{MN}}{\mathbf{Z}_{L_2}} = -3 \text{ A} \quad (38)$$

Quindi:

$$i_{e_2}(T) = 4,24 \cos(\omega T + \pi) = -4,243 \text{ A} \quad (39)$$

Quindi:

$$W_H = \frac{1}{2} L_2 i_{e_2}^2(T) = 900 \text{ mJ} \quad (40)$$

La potenza complessa erogata da  $\mathbf{E}_2$  vale:

$$\mathbf{S}_{E_2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{I}_{E_2}^* = (-30 + j0) \text{ VA} \quad (41)$$

Infine:

$$Q_{E_2} = \text{Im}(\mathbf{S}_{E_2}) = 0 \text{ var} \quad (42)$$